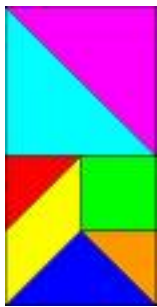


STAND ARENES

Manipulations:

Les solutions du tangram étaient



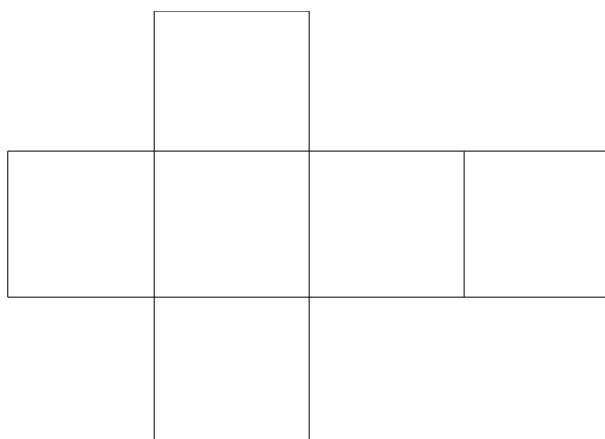
La légende veut qu'un empereur chinois du 16ème siècle, admirant un magnifique carreau de faïence, le laissa tomber par mégarde sur le sol où il se brisa en sept morceaux. Désolé de sa maladresse, l'empereur voulut reconstituer le carreau brisé, mais il ne put jamais y parvenir et recréa à la place des milliers de figures différentes.

On peut faire de nombreuses figures différentes mais certaines sont très représentatives des rapports mathématiques et géométriques liant les différents éléments du jeu, ce qui aurait, dit-on, favorisé la compréhension du théorème de Pythagore en Chine.

Questions

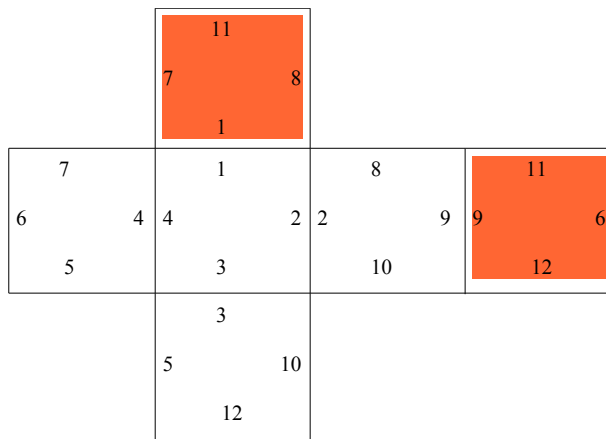
Question jaune :

Le patron du cube le plus connu est



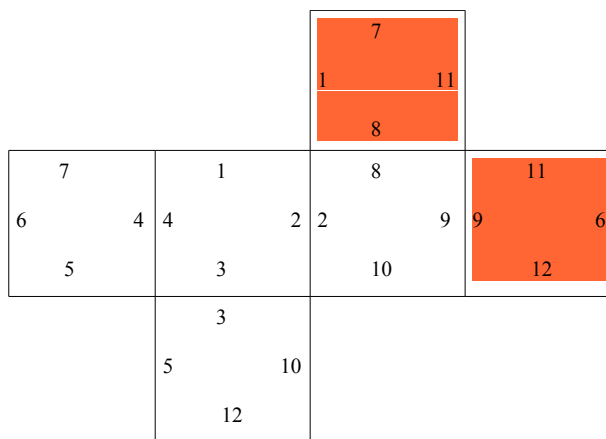
L'important est de réaliser qu'un cube possède 6 faces et 12 arêtes. Ainsi, 6 carrés (qui seront les faces du cube) positionnés côte à côte dans le plan formeront un patron du cube si lorsqu'on effectue le pliage de la figure, les arêtes se « collent » bien !

Reprenons la figure ci-dessus et numérotions les arêtes de 1 à 12 :



Chaque arête, étant l'intersection de deux faces, est numérotée deux fois. Ainsi, une fois le cube formé, l'arête 11 est l'intersection des deux faces oranges.

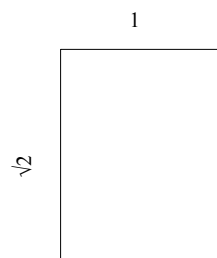
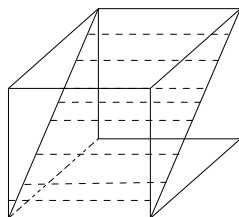
Pour construire d'autres patrons du cube, il suffit de déplacer les différentes faces en respectant la correspondance des numérotations sur les arêtes. Par exemple pour obtenir le patron suivant on a fait pivoter la face (1,7,11,8) :

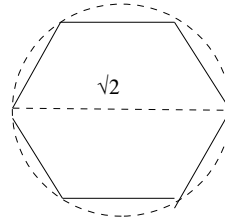
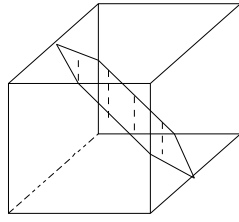


Amusez vous à continuer pour construire les 11 patrons différents du cube en n'oubliant pas que deux patrons sont identiques s'ils sont superposables après une rotation ou une symétrie.

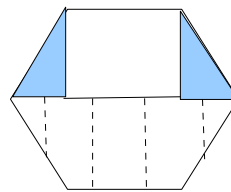
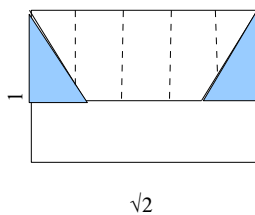
Question orange :

La surface la plus grande est celle du rectangle qui correspond à la section du cube perpendiculaire à une diagonale d'une face du carré (et passant par le centre du cube). La surface hexagonale est la section du cube perpendiculaire à la diagonale du cube (c'est-à-dire la direction de coordonnées (1,1,1)). Pour les comparer, on prend un cube unité et on le coupe de la façon suivante :





On constate en utilisant le théorème de Pythagore que la première section est un rectangle de base 1 et de hauteur $\sqrt{2}$ alors que la seconde section coupe chacune des arêtes au milieu des arêtes ce qui donne un hexagone de côté $\sqrt{2} / 2$. Il s'agit alors d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt{2}$. On peut alors comparer les aires de ces 2 surfaces en effectuant le découpage suivant :

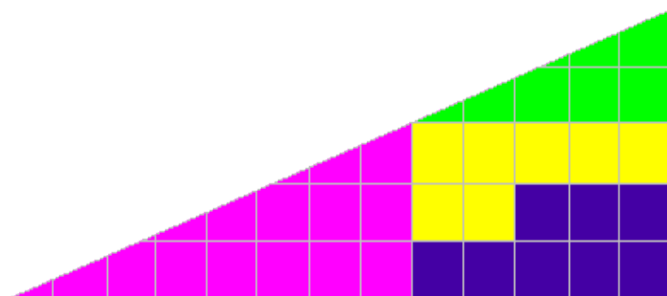


On découpe l'hexagone en 2 parties égales (et le diamètre du cercle circonscrit à l'hexagone a exactement la même longueur que le plus long côté du rectangle) puis les 2 triangles bleus viennent compléter le rectangle. Il ne reste plus qu'à constater que le rectangle restant dans l'hexagone rentre facilement dans le grand rectangle de la surface de gauche (il suffit de le couper en 2).

On peut évidemment faire aussi le calcul exact des surfaces. L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux de côté $\sqrt{2} / 2$ donc son aire vaut $3\sqrt{3} / 4$. Tandis que le rectangle a pour aire $\sqrt{2}$. Et clairement, $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$ car $27 < 32$.

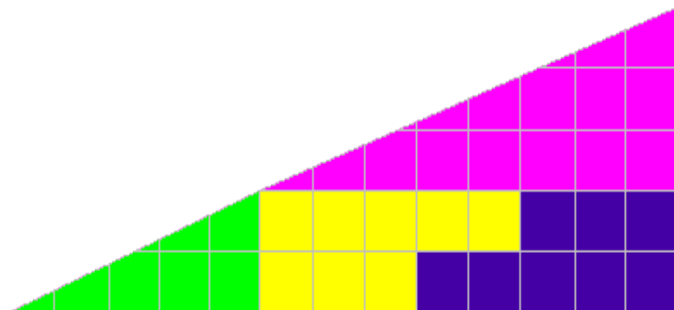
De façon plus générale, on peut se demander quelle va être la section centrale du cube de plus grande aire. Le résultat est que ce sera toujours la section orthogonale à la diagonale d'une face, c'est-à-dire le rectangle d'aire $\sqrt{2}$. La preuve est délicate (en toute dimension) et nécessite l'utilisation de techniques très fines d'analyse. En particulier, bien qu'une formule intégrale (en fonction des coordonnées de la direction orthogonale au plan de la section) existe, on ne peut pas étudier les extrema de cette fonction de plusieurs variables car il existe de nombreux points selles. Autrement dit, il existe de nombreux maxima locaux pour cette fonction.

Question bleue :



Les figures géométriques qui permettent de construire cette figure sont un rectangle de base 5 et de hauteur 3 (les pièces jaunes et bleues réunies), un triangle de base 5 et de hauteur 2 (le triangle vert) ainsi qu'un triangle de base 8 et de hauteur 3 (le triangle rose). Son aire est donc égale à

$$5 \cdot 3 + (5 \cdot 2)/2 + (8 \cdot 3)/2 = 32 \text{ unités au carré.}$$



Les figures géométriques qui permettent de construire cette figure sont un rectangle de base 8 et de hauteur 2 (les pièces jaunes et bleues réunies), un triangle de base 5 et de hauteur 2 (le triangle vert) ainsi qu'un triangle de base 8 et de hauteur 3 (le triangle rose). Son aire est donc égale à

$$8 \cdot 2 + (5 \cdot 2)/2 + (8 \cdot 3)/2 = 33 \text{ unités au carré.}$$

La pièce de droite a donc une plus grande aire que celle de gauche. L'aire diffère d'un petit carré. On a cependant l'impression que les deux pièces sont identiques, c'est-à-dire un triangle de base 13 et de hauteur 5. Mais ce n'est pas le cas, ces figures ne sont pas des triangles. Les hypothénuses de chaque triangle rose et vert ne sont pas parallèles car l'un des angles a pour tangente $3/8$ (le rose) et l'autre $2/5$ (le vert). Cela donne deux angles très proches mais pas identiques.

Vous constaterez que les nombres utilisés pour construire les bases et hauteurs des triangles et rectangles proviennent de la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour tout entier n supérieur à 1. On a ainsi $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8$, $u_6 = 13$. Sauriez-vous construire deux pièces qui ressembleraient à un triangle de base 21 et de hauteur 13 et dont les aires différeraient d'une unité (i.e. d'un petit carré)? La construction sera inspirée de celle qui vous a été proposée. Si vous continuez, vous verrez ainsi que les figures ressemblent de plus en plus à un triangle alors que les aires diffèrent toujours d'un carré !